



FUNCIONES DE FORMA CLASE C1 EN ELEMENTOS DE VIGA CONSIDERANDO DEFORMACIONES POR CORTE Y TORSIÓN.

Verri Kozlowski, A. D.[§]

Resumen: En el análisis de elementos de viga de sección transversal compuesta por sucesivas capas de láminas reforzadas con fibras unidireccionales de alta resistencia y orientadas arbitrariamente (laminados compuestos), la determinación de las tensiones tangenciales interlaminares es fundamental para el análisis del comportamiento mecánico no lineal del elemento. Esto requiere de la utilización de teorías de vigas que consideren hipótesis cinemáticas que admitan deformaciones por corte, particularmente en el caso de secciones no circulares sometidas a esfuerzos combinados de torsión. Por otra parte, las elevadas relaciones rigidez/peso y resistencia/peso de las vigas de laminados compuestos, establecen secciones transversales extremadamente esbeltas que para problemas de flexión, corte y torsión acopladas, requieren de un análisis basado en medidas de deformación finitas, las que finalmente derivan en la determinación de matrices de rigidez no-lineales. El objeto del presente artículo será la formulación de un conjunto de funciones de forma de continuidad clase C1, basada en una teoría de vigas que considere las deformaciones por corte y torsión acopladas, para un elemento finito de viga 3-D sometido a esfuerzos de flexión, corte y torsión con alabeo.

[§] Profesor Adjunto Interino. Mecánica de Laminados Compuestos. Departamento de Estabilidad. (FIUBA). Ingeniero Civil.

REVISION: 30/05/2006

Introducción.

En un elemento de viga de eje recto y sección transversal constante, el campo completo de desplazamientos incrementales del cualquier punto perteneciente a la sección transversal queda determinado mediante un conjunto de funciones definidas a partir de un sistema de coordenadas local solidario con el eje de referencia del elemento.

$$\mathbf{u}^T = [u(x, y, z) \quad v(x, y, z) \quad w(x, y, z)] \dots\dots\dots (1)$$

El problema de la viga espacial sometida a esfuerzos de flexión, corte y torsión combinadas en sus extremos, tiene solución cerrada según la teoría de la elasticidad para la viga analizada como un sólido tridimensional sometido a esfuerzos en sus extremos. [09]. Las funciones “exactas” que determinarían el campo completo de desplazamientos, son solución de la ecuación diferencial de equilibrio, para las condiciones naturales y esenciales de borde, es decir que son la solución equilibrada y compatible del problema. Estas funciones se obtienen de la teoría de elasticidad, como la combinación de las soluciones de los cuatro problemas fundamentales de Saint Venant.

Otro planteo posible y es el que aquí se desarrolla, se basa en la teoría de vigas, las cuales parten de la hipótesis cinemática fundamental de las secciones planas y permiten expresar todo el campo de desplazamientos en función de los desplazamientos incrementales del eje de

referencia y los giros de flexión. Además, la hipótesis de secciones planas admite considerar de modo sencillo mediante una teoría de primer orden, la influencia de las deformaciones por corte sobre los desplazamientos y los giros.

Incorporando luego los términos adicionales debidos al alabeo de la sección (los cuales sí son solución exacta de la teoría de la elasticidad), es posible formular una razonable aproximación al problema del campo de desplazamientos de un elemento de viga tridimensional, sometido a flexión, corte y torsión combinadas, sin considerar secciones planas.

En una formulación de elementos finitos, se busca un campo de desplazamientos aproximado mediante un conjunto de funciones de forma que interpolen el campo de desplazamiento incógnita a partir de valores conocidos en los nodos del elemento, organizados en un arreglo conocido como el vector de variables nodales independientes.

$$\{\mathbf{u}\} \approx [\mathbf{H}] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} \dots\dots\dots (2)$$

En la expresión anterior, la matriz $[\mathbf{H}]$ es un arreglo de $3xN$ dimensiones, con N funciones de forma que interpolan los desplazamientos relativos $u(x, y, z)$, $v(x, y)$, $w(x, z)$.

La interpolación mediante funciones de forma de clase C1 permite representar un campo aproximado de desplazamientos transversales que verifica las mismas relaciones diferenciales entre desplazamientos y giros. Debido a que utiliza el doble de parámetros de interpolación¹, estas funciones verifican continuidad entre elementos del campo de desplazamientos y sus derivadas, por lo que a estas formulaciones se las denomina de clase C1.

En un esquema de clase C1, se mantienen las relaciones diferenciales entre derivadas de desplazamientos y giros para el campo de desplazamientos aproximado. En elementos de viga de eje recto es natural y mucho más eficiente, emplear interpolaciones de clase C1 debido que por su alta precisión, requieren aproximadamente la mitad de elementos para representar el mismo campo de desplazamientos que una malla con elementos de continuidad C0, y por otra parte, los giros y los desplazamientos se interpolan de manera consistente con los giros y las deformaciones por corte, lo cual evita problemas en la determinación de la rigidez correcta del elemento. Sin embargo, en un esquema de continuidad clase C1, no es tan sencilla la determinación de las funciones de forma cuando se consideran las deformaciones por corte y torsión, como en el caso de las interpolaciones isoparamétricas C0.

Revisión de las teorías de vigas

La hipótesis cinemática fundamental en las teorías de vigas se basa en el mantenimiento de las secciones planas luego de la deformación. Esta hipótesis fundamental permite entre otras cosas, formular el campo completo de desplazamientos de la viga en función de las rotaciones de flexión y desplazamientos transversales del eje de referencia de la viga. En los párrafos subsiguientes, se revisan algunas teorías de vigas que permiten establecer las relaciones cinemáticas entre los giros transversales, las deformaciones por corte y los desplazamientos incrementales del eje de referencia del elemento.

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli

Cuando no se consideran las deformaciones por corte, se puede utilizar la teoría de Euler-Bernoulli, en la cual se formula como hipótesis de linealidad cinemática la conservación de las secciones transversales planas y normales al eje de la viga, antes y después de la deformación. Esta hipótesis desprecia las deformaciones por corte en ambos planos de flexión transversal ($\gamma_{xz} \approx 0, \gamma_{xy} \approx 0$) y debido a ello, las deflexiones son subestimadas y las frecuencias naturales y cargas críticas de pandeo son sobrestimadas. La validez de esta

aproximación dependerá de la relación de lados con la longitud de la viga y de la magnitud de los esfuerzos de corte, el cual tendrá particular influencia cuando las ecuaciones constitutivas del material tengan módulos bajos de deformación transversal.

La teoría de vigas de Timoshenko-Reissner

Cuando se consideran las deformaciones por corte, deben hacerse hipótesis adicionales sobre la distribución de las mismas en la sección transversal. En primera aproximación, si se mantiene la hipótesis de las secciones planas, se puede admitir luego la existencia de una deformación por corte constante (distorsión angular) en toda la altura de la sección, que cambia el giro de flexión y causa que las secciones planas ya no sean perpendiculares al eje medio de la viga, como sí lo eran en las hipótesis de Euler-Bernoulli. Cuando se consideran las deformaciones por corte bajo una hipótesis de secciones planas, se está utilizando una teoría de deformaciones de corte de primer orden (FSDT) y se corresponde con las hipótesis de Timoshenko-Reissner para vigas y placas gruesas.

La consideración de una distribución constante de deformaciones por corte, requiere de la corrección del valor de la energía de deformación por corte mediante un factor de forma. Además una distribución constante viola las condiciones de borde en los extremos de la sección transversal. Por lo tanto, otras hipótesis pueden efectuarse para distribución de las deformaciones por corte que verifiquen las condiciones de borde transversales y que no requieren de corrección alguna, lo que deriva en la consideración de teoría de deformaciones por corte de orden superior [05],[10].

Asumiendo una deformación por corte constante en todo el elemento, serán necesarias dos deformaciones por corte γ_{xz}^o y γ_{xy}^o para representar el campo completo de desplazamientos de la viga de corte. La teoría de vigas de Timoshenko-Reissner en un planteo de elementos finitos y variables nodales, implica considerar los giros de la sección y las deformaciones por corte como variables independientes y se relacionan entre sí mediante las expresiones conocidas.

$$\theta_y(x) = \gamma_{xz} + \frac{dw^o}{dx} \quad \theta_z(x) = \gamma_{xy} - \frac{dv^o}{dx} \dots\dots\dots(3)$$

La teoría de Torsión de Coulomb

La existencia de esfuerzos de torsión en el elemento, merece un análisis preliminar, debido a la posibilidad del alabeo de la sección y en consecuencia del mismo, la pérdida de la hipótesis cinemática fundamental de secciones planas. El caso más simple de torsión se tiene cuando en ambos extremos de una viga de eje recto, actúan momentos iguales y contrarios, en planos normales

¹ Para los desplazamientos transversales y giros de flexión únicamente.

al eje geométrico: en cuyo caso la sollicitación es de torsión simple y constante en todas las secciones.

Cuando las secciones transversales del elemento son de sección circular maciza o hueca, la torsión puede estudiarse por el procedimiento elemental debido a Coulomb. Según la teoría de Coulomb, en la sección circular o anular los desplazamientos se suponen debidos a una rotación pura o torsión de cada sección transversal, sin desplazamientos en la dirección axial. Si en un elemento de viga de sección circular la torsión por unidad de longitud $d\theta_x/dx = (\theta_x^2 - \theta_x^1)/L = \varphi$ es constante, las únicas tensiones no nulas serán las tensiones tangenciales $\tau_{xz} = -G \cdot \varphi \cdot z$ y $\tau_{xy} = G \cdot \varphi \cdot y$.² y no se producen tensiones longitudinales. Luego, los desplazamientos relativos longitudinales no se modifican en este caso.

La teoría de Torsión de Saint-Venant

La teoría elemental de Coulomb de la torsión de las vigas de sección circular fue aplicada erróneamente por Navier a vigas de sección cualquiera, suponiendo que las secciones se mantendrían también planas. Por el contrario, la teoría de la elasticidad y la experiencia³ demuestran que las secciones (si no son circulares) se mantienen efectivamente indeformadas en su plano (los radios que salen del centro de torsión permanecen rectos y las distancias angulares mutuas no cambian) pero se hacen alabeadas, es decir, que las rectas contenidas en la sección se salen del plano.

El desplazamiento relativo longitudinal para la viga de eje recto de sección transversal arbitraria y sometida a torsión simple, queda determinado según la teoría de Saint Venant.

$$u(x, y, z) = \chi_x(y, z) \cdot \frac{d\theta_x}{dx} \dots\dots\dots (4)$$

La función $\chi(y, z)$, se denomina función de Warping o Alabeo, la cual por conveniencia ha sido multiplicada por el giro unitario de la sección.⁴ La función de alabeo se obtiene como la solución del problema de la teoría de la elasticidad de la viga sometida a un par torsor en sus

² El campo de tensiones verifica el caso trivial de giro de la sección transversal constante a lo largo del elemento, el cual implica un movimiento de cuerpo rígido sin deformaciones ni tensiones.

³ La resistencia de materiales provee analogías cualitativas muy útiles para comprender el problema de la torsión. La analogía de la membrana de Prandtl y la analogía hidrodinámica de Greenhill son herramientas muy útiles para un examen cualitativo, y si bien estos modelos no simplifican el estudio de la torsión dado que las dificultades analíticas son las mismas en cada caso, es sabido que el fenómeno hidráulico y de la membrana, son mucho más intuitivos que el elástico.

⁴ De este modo, para un giro de cuerpo rígido no se producen distorsiones angulares.

extremos, el cual se conoce como el Tercer Problema de Saint-Venant.

$$\chi(y, z) = y \cdot z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cdot \sin(k_n \cdot y) \cdot \sinh(k_n \cdot z)}{a \cdot (k_n)^3 \cdot \cosh(k_n \cdot b)} \dots\dots\dots (5)$$

$$k_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{2a} \quad 2a = b_o \quad 2b = h$$

La serie infinita resultante de la solución analítica, converge rápidamente por lo que requiere muy pocos términos para llegar a resultados con menos de un 1% de error numérico [02].

La formulación del campo de desplazamientos.

A partir de las diferentes teorías de vigas, se propone un campo de desplazamientos para el elemento de viga tridimensional sometido a sollicitaciones axiales, de flexión, de corte y de torsión combinadas. El campo formulado parte de la hipótesis cinemática fundamental de las secciones planas la cual permite obtener la solución del problema mediante una teoría lineal de desplazamientos. A partir de las hipótesis de secciones planas, fue posible relacionar los giros de flexión con los incrementos de desplazamientos transversales.

Luego, para considerar los efectos de la torsión, se determinan e incorporan los términos adicionales al campo de desplazamientos debidos a la torsión y al alabeo de la sección transversal. Se obtiene entonces un conjunto de funciones definidas a partir de un sistema de coordenadas local, solidario al eje medio de la sección.

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^o(x) \\ v^o(x) \\ w^o(x) \end{Bmatrix} + y \cdot \begin{Bmatrix} \theta_z(x) \\ 0 \\ \theta_x(x) \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} \theta_y(x) \\ \theta_x(x) \\ 0 \end{Bmatrix} + \chi_x \cdot \begin{Bmatrix} \frac{d\theta_x}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

Por otra parte, la consideración de la influencia de las deformaciones por corte en el campo de desplazamientos del elemento de viga, requiere previamente de la determinación de las distorsiones angulares $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Estas distorsiones angulares de corte, están directamente relacionadas⁵ con las componentes del tensor de deformación asociado al campo de desplazamientos. Esto significa que las relaciones entre los giros, las deformaciones por corte y las derivadas de los desplazamientos, dependerán de la medida de deformación utilizada.

⁵ Las distorsiones angulares son deformaciones debidas a corte simple, y no son componentes de un tensor de 2do orden. Las deformaciones de corte puro sí son componentes de un tensor de 2do orden

Si se utiliza una medida de deformación infinitesimal, las relaciones cinemáticas entre giros y derivadas de desplazamientos son lineales y pueden ser interpoladas luego mediante funciones de forma. Luego, utilizando las distorsiones de corte obtenidas en las expresiones (28) y (29), los giros y desplazamientos transversales y las deformaciones por corte se relacionan según las siguientes expresiones:

$$\theta_y(x, y, z) = \gamma_{xz} + \frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial z} + y \right) \dots\dots\dots (7)$$

$$\theta_z(x, y, z) = \gamma_{xy} - \frac{dv^o}{dx} - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} - z \right) \dots\dots\dots (8)$$

En las expresiones se puede ver que los términos asociados a la torsión, implican que las secciones transversales pierden la hipótesis cinemática fundamental de las secciones planas, ya que ahora los giros de las secciones transversales dependen de las variables coordenadas del plano transversal YZ

La utilización de una medida de deformación no lineal, como el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, permite establecer otra relación cinemática entre los giros y los desplazamientos transversales, la cual, como se verá, no puede ser utilizada dentro de una formulación de elementos finitos basados en funciones de forma. Si se desarrollan las expresiones de las distorsiones angulares γ_{xz} y γ_{xy} obtenidas a partir de las la hipótesis de Von Karman (pequeñas deformaciones pero giros moderados, se obtienen términos adicionales a la relación entre giros, desplazamientos transversales y deformaciones por corte, que hacen al problema no-lineal.

$$\theta_y = \gamma_{xz} + \frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial z} + y \right) + \theta_x \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot z - \frac{dv^o}{dx} \right) \dots\dots (9)$$

$$\theta_z = \gamma_{xy} - \frac{dv^o}{dx} - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} - z \right) - \theta_x \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot y + \frac{dw^o}{dx} \right) \dots\dots (10)$$

En estas expresiones los términos subrayados indican productos entre los giros de torsión y las derivadas de éste y del desplazamiento transversal, y hace al problema de la interpolación un problema no-lineal. Luego, la consideración de estos términos implica que no pueden interpolarse los desplazamientos del elemento con polinomios, que son las formas lineales empleadas en la discretización de elementos finitos. Por lo tanto, en la formulación de las funciones de forma del campo de desplazamientos, no podrán considerarse para los giros de flexión las deformaciones por corte basados en medidas de deformación finita.

Las expresiones (5) (6), (7) (8) representan el campo de desplazamientos aproximado para el caso de una viga de

eje recto y sección transversal constante, sometida a esfuerzos normales, de flexión, de corte y de torsión combinados, e incluyen los términos adicionales debidos al alabeo de la sección⁶.

La interpolación del campo de desplazamientos

A partir de una formulación débil del equilibrio, en un planteo discreto de elementos finitos se busca un campo de desplazamientos que verifique la compatibilidad, el equilibrio y las condiciones de borde, pero ya no en todo el dominio sino únicamente en los nodos del elemento. Este campo de desplazamientos se podrá aproximar mediante la interpolación numérica de las variables nodales externas e internas del elemento, mediante un conjunto de funciones de interpolación $h^i_m = h^i_m(x, y, z)$

$$u_i(x, y, z) \approx \sum_{m=1}^N h^i_m \cdot \hat{U}_m \dots\dots\dots (11)$$

Las matrices h^i_m son arreglos de 1xN, es decir vectores fila, que pueden agruparse en una matriz de interpolación de 3xN, donde N es el número de grados de libertad del elemento de viga en el espacio. Luego, las funciones de interpolación se pueden agrupar en una matriz de interpolación:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{h}^1(x, y, z)] \\ [\mathbf{h}^2(x, y)] \\ [\mathbf{h}^3(x, z)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^1_1 & h^1_2 & \dots & h^1_N \\ h^2_1 & h^2_2 & \dots & h^2_N \\ h^3_1 & h^3_2 & \dots & h^3_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

Las funciones de interpolación o funciones de forma h^i_k interpolan el campo de desplazamientos $u^i(x, y, z)$ y se determinan seleccionando arbitrariamente el grado del polinomio a partir de las incógnitas nodales disponibles en el elemento. Por otra parte, la teoría de vigas adoptada relaciona los desplazamientos incrementales del eje de referencia y los giros de flexión respecto de este, con el campo de desplazamientos $u(x, y, z)$, $v(x, y)$, $w(x, z)$. Por lo tanto, para determinar las funciones de forma es necesario previamente definir que clase de continuidad se requiere para cada componente del campo de desplazamientos del elemento.

Interpolación C1 de los desplazamientos transversales

Debido a las relaciones diferenciales que existen entre desplazamientos transversales y giros, que surgen de las hipótesis de secciones planas, el esquema elegido para interpolar desplazamientos transversales $v(x, y)$ y $w(x, z)$

⁶ En secciones transversales de alma llena, en general el alabeo de la sección estará restringido y generará en consecuencia tensiones longitudinales que deberán ser consideradas.

Planteando la matriz del sistema lineal de N ecuaciones y resolviendo para un vector incógnita de N coeficientes de interpolación, se obtienen las expresiones de las funciones de forma. Definiendo un conjunto de funciones auxiliares, φ_k con $k = 1 \dots 8$, la matriz de interpolación se muestra en la Fig.2 La función de alabeo $\chi(y, z)$ y sus derivadas

parciales, se encuentran condensadas en la función auxiliar $\varphi_2(y, z)$. La expresión de la matriz de interpolación, si no se consideran los efectos del alabeo de la sección transversal, es idéntica a la obtenida en la referencia [01]

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & -\varphi_2 & -\varphi_3 \cdot z & \varphi_3 \cdot y & \frac{x}{L} & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & \varphi_2 & \varphi_4 \cdot z & -\varphi_4 \cdot y & -6 \cdot \varphi_1 \cdot z & 6 \cdot \varphi_1 \cdot y \\ 0 & \varphi_5 & 0 & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot z & 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_7 & 0 & -\frac{x}{L} \cdot z & 0 & \varphi_1 \cdot x & 0 & \varphi_8 \\ 0 & 0 & \varphi_5 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot y & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & \varphi_7 & \frac{x}{L} \cdot y & -\varphi_1 \cdot x & 0 & -\varphi_8 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig.2 Funciones de forma para el elemento de viga tridimensional sometido a esfuerzo normal, flexión corte y torsión considerando el alabeo de las secciones transversales.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(L-x) \cdot x}{L^2} & \varphi_2(y, z) &= \frac{1}{L} \left(\chi - z \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} - y \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) & \varphi_3(x) &= \frac{(L-3x) \cdot (L-x)}{L^2} \\ \varphi_4(x) &= \frac{(2L-3x) \cdot x}{L^2} & \varphi_5(x) &= \frac{(L-x)^2 \cdot (L+2x)}{L^3} & \varphi_6(x) &= \frac{(L-x)^2 \cdot x}{L^2} \\ \varphi_7(x) &= \frac{(3L-2x) \cdot x^2}{L^3} & \varphi_8(x) &= \frac{(L-2x) \cdot (L-x) \cdot x}{L^2} \end{aligned}$$

Fig.3 Funciones auxiliares del elemento de viga 3-D.

Comentarios sobre la interpolación clase C0 y teoría de vigas de Timoshenko.

En buena parte de la literatura existe una confusión entre el elemento de viga de Timoshenko y las interpolaciones de clase C0, que es oportuno aquí aclarar. Los elementos de viga que interpolan el campo de desplazamientos con funciones de forma de continuidad C0, deben considerar las deformaciones por corte, y en general se los denomina como elementos de viga de Corte o de Timoshenko.

En un planteo de continuidad clase C0, los giros se interpolan de manera independiente de los desplazamientos transversales, y en principio sólo se requiere para las funciones de interpolación la continuidad de las mismas dentro del elemento, aunque no de sus derivadas.

Esto implica que los desplazamientos transversales del elemento (la flecha) estarán dados por una distribución lineal y dado que existe flexión, una deformada de este tipo sólo se podrá alcanzar mediante la incorporación de una enorme cantidad de energía de corte, tal que logre “enderezar” la deformada de la viga de eje recto en equilibrio.

Por ello, los elementos de clase C0, deben considerar las deformaciones por corte en su cinemática ya que

efectivamente las secciones permanecerán planas pero no perpendiculares al eje de la sección, por utilizar una interpolación lineal del desplazamiento transversal simultáneamente con la existencia de momentos flectores que giran (planas) las secciones transversales.

Por otra parte, la gran cantidad de energía de corte necesaria para verificar tal deformada, obliga el empleo de artilugios numéricos para subestimar la energía de corte (la deformación por corte) de lo contrario las soluciones se vuelven muy rígidas a partir de ciertas relaciones de lado/longitud.

Estas cuestiones señalan una paradoja: en los elementos finitos de clase C0, denominados como elementos de viga de Timoshenko, la deformación por corte se debe interpolar para establecer la cinemática correcta, pero la mayoría del corte luego es “removido” para recuperar la rigidez correcta. Luego, capturar la deformación real por corte no es el objetivo de dicha formulación. [*]. La interpolación clase C0 es muy empleada en vigas de eje curvo y su generalización permite extender la formulación de elementos finitos a placas y cáscaras curvas fácilmente [01]

Determinación de las deformaciones por corte.

Los giros y las derivadas de los desplazamientos transversales, estarán relacionados con las distorsiones de corte y dependerán de la medida de deformación utilizada para determinar las componentes asociadas del tensor de deformaciones.

Las componentes del tensor de pequeñas deformaciones

Si se asume una teoría lineal⁸, se puede utilizar la medida de deformación del tensor de pequeñas deformaciones:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}}\underline{\underline{\nabla}}) \dots\dots\dots(18)$$

Expresando en notación tensorial las componentes de los tensores gradiente de desplazamientos se tiene.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \dots\dots\dots(19)$$

Las componentes del tensor gradiente de desplazamientos pueden expresarse en notación de coordenadas cartesianas haciendo $X_1 \approx x$, $X_2 \approx y$, $X_3 \approx z$. Reemplazando se obtienen las componentes cartesianas del tensor de pequeñas deformaciones:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots\dots\dots(20)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots\dots\dots(21)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \dots\dots\dots(22)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(23)$$

Reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos propuesto, se obtiene el campo de deformaciones según la teoría lineal:

$$e_{xx} = \frac{du^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \dots\dots\dots(24)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv^o}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_x}{dx} + \theta_z(x) + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(25)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_x}{dx} - \theta_y(x) + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(26)$$

⁸ Es decir si se asume que las componentes del tensor gradiente de desplazamientos son mucho menores que la unidad

Las deformaciones longitudinales se obtuvieron asumiendo un giro de torsión constante dentro del elemento ($d^2\theta_x/dx^2 = 0$). Independientemente de la función de torsión empleada, se verifica que la distorsión del plano de la sección transversal es nula ($\gamma_{yz} = 0$).

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) = \frac{1}{2} \cdot (-\theta_x + \theta_x) = 0 \dots\dots\dots(27)$$

Desarrollando las expresiones de las distorsiones angulares $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, a partir de las componentes tensoriales e_{xz}, e_{xy}, e_{yz} se obtienen las deformaciones por corte⁹

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot e_{xy} = \frac{dv^o}{dx} + \theta_z + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} - z \right) \dots\dots\dots(28)$$

$$\gamma_{xz} = 2 \cdot e_{xz} = -\frac{dw^o}{dx} + \theta_y - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial z} + y \right) \dots\dots\dots(29)$$

El signo negativo de la expresión (29) se debe a que la distorsión de corte simple debe producir trabajo positivo para un esfuerzo de corte positivo.¹⁰ Las distorsiones de corte se componen de términos debido a la flexión y el último término debido a la torsión con alabeo.

Estas expresiones se utilizaron previamente para obtener las relaciones cinemáticas de la teoría de vigas de Timoshenko y se asumió como hipótesis que las deformaciones por corte eran constantes en el elemento, asociado a la idea de un esfuerzo de corte constante dentro del elemento¹¹. Esto se verifica si se cumplen las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta_x}{dx^2} = 0 \wedge -\frac{d^2v^o}{dx^2} = \frac{d\theta_z}{dx} \dots\dots\dots(30)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta_x}{dx^2} = 0 \wedge \frac{d^2w^o}{dx^2} = \frac{d\theta_y}{dx} \dots\dots\dots(31)$$

Luego, si el giro específico de torsión varía dentro del elemento, existirán derivadas no nulas de las distorsiones angulares que se obtienen como la solución de una

⁹La transformación entre deformaciones ingenieriles y deformaciones tensoriales de corte se puede implementar computacionalmente mediante la transformación de Reuter, habitualmente utilizada en la bibliografía asociada a laminados compuestos.

¹⁰ Una verificación práctica de los signos correctos en las distorsiones, se logra mediante las funciones de interpolación. Si alguna distorsión tiene el signo incorrecto, no se verificaría la condición de convergencia de las funciones de forma.

¹¹ En un planteo C1 sin deformaciones por corte, la relación de equilibrio entre el momento y el corte establece que para una deformación transversal cúbica, los momentos varían linealmente y el esfuerzo de corte es constante.

ecuación diferencial. Por lo tanto, en una teoría aproximada de vigas donde se asume una teoría de primer orden para las deformaciones por corte, la derivada de los giros de torsión y las deformaciones por corte deben ser constantes dentro del elemento.

Finalmente, en un esquema de interpolación que no considera los efectos de la torsión, la deformación longitudinal se reduce a la obtenida mediante la teoría de Euler-Bernoulli, independientemente de la consideración de las deformaciones por corte.

El tensor de deformaciones finitas.

Si en lugar de utilizar una teoría de pequeñas deformaciones, se asumieran deformaciones finitas, las componentes del tensor de deformaciones pueden obtenerse mediante el tensor de Green-lagrange, definido sobre la configuración de referencia:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{u}} \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{\nabla}}) \dots\dots\dots(32)$$

Las componentes del tensor de deformaciones incluyen ahora términos no-lineales, que deberán ser debidamente linealizados para obtener las matrices de rigidez basados en una formulación débil del equilibrio. Desarrollando estas expresiones y separando los términos lineales y no lineales, se tiene en notación tensorial:

$$E_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \dots\dots\dots(33)$$

Los términos lineales son los obtenidos según el tensor de pequeñas deformaciones dado por las expresiones (24) a (27). Los términos no-lineales quedan expresados luego en coordenadas cartesianas según:

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(34)$$

$$\eta_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(35)$$

$$\eta_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(36)$$

$$\eta_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(37)$$

Reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos en (19) y (33), se obtienen las expresiones de las componentes no-lineales del tensor de deformaciones finitas, las cuales se detallan en la Fig.4.

Las hipótesis de Von Karman

Si se mantiene la hipótesis de deformaciones pequeñas, pero se admiten rotaciones moderadas, algunos productos entre las componentes del gradiente de desplazamientos serán infinitesimos de segundo orden y podrán despreciarse. Si además se consideran rotaciones moderadas, otros productos entre derivadas serán pequeños pero ya no despreciables. Desarrollando los términos del tensor de deformaciones finitas y eliminando los términos considerados infinitesimales, se obtienen las componentes no lineales de esta medida de deformación mixta, basada en la teoría de placas de Von Karman.

$$\eta_{xx} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(38)$$

$$\eta_{xy} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(39)$$

$$\eta_{xz} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(40)$$

Reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos propuesto para el elemento de viga, as componentes no lineales del tensor de deformaciones finitas quedan determinadas según las expresiones

$$\{\boldsymbol{\eta}\}^T = [\eta_{xx} \quad 2 \cdot \eta_{xz} \quad 2 \cdot \eta_{xy}] \dots\dots\dots(41)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv^o}{dx} - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot z \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot y \right)^2 \dots\dots\dots(42)$$

$$\eta_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot y \right) \cdot \theta_x \dots\dots\dots(43)$$

$$\eta_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot z - \frac{dv^o}{dx} \right) \cdot \theta_x \dots\dots\dots(44)$$

Para obtener las relaciones cinemáticas entre giros, desplazamientos y deformaciones por corte, se obtienen las expresiones de las distorsiones angulares para el caso del elemento de viga para pequeñas deformaciones y giros moderados según:

$$\gamma_{xz} \approx \theta_y - \frac{dv^o}{dx} - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial z} + y \right) - \theta_x \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot z - \frac{dv^o}{dx} \right) \dots\dots(45)$$

$$\gamma_{xy} \approx \theta_z + \frac{dv^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} - z \right) + \theta_x \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot y + \frac{dv^o}{dx} \right) \dots\dots(46)$$

Interpolación del campo de deformaciones

En un esquema de elementos finitos, el campo de deformaciones será interpolado a partir de las variables nodales independientes del elemento.

Si se admite una teoría lineal de deformaciones, las componentes no nulas del tensor de deformaciones infinitesimales e_{ij} para el elemento de viga quedan interpoladas según un conjunto de derivadas de las funciones de interpolación,

$$e_{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^N (h^i_{m,j} + h^j_{m,i}) \cdot \hat{U}_m \quad (i, j = 1, 2, 3) \dots\dots\dots(47)$$

Si se admite una medida de deformación finita como el tensor de Green-Lagrange, el tensor de deformaciones podrá descomponerse en la suma de la parte lineal obtenida en arriba y una parte no-lineal, η_{ij}

$$\eta_{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \hat{U}_m \cdot (h^1_{n,i} h^1_{m,j} + h^2_{n,i} h^2_{m,j} + h^3_{n,i} h^3_{m,j}) \cdot \hat{U}_n \quad (48)$$

$(i, j = 1, 2, 3)$

Al igual que las funciones de forma, las matrices asociadas a los términos lineales (47) son arreglos de 1xN, que pueden agruparse en una matriz de interpolación de 3xN, donde N es el número de grados de libertad del elemento de viga propuesto y se obtienen por la derivación de las funciones de forma.

$$(b_L)_{ij}^m \approx \frac{1}{2} \cdot (h^i_{m,j} + h^j_{m,i}) \quad (m = 1..N \quad i, j = 1, 2, 3) \dots(49)$$

Las matrices asociadas a los términos no-lineales del tensor de deformaciones son arreglos de NxN, que se obtienen por el producto de las derivadas de las funciones de forma.

$$(b_{NL})_{mn}^{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot (h^1_{n,i} \cdot h^1_{m,j} + h^2_{n,i} \cdot h^2_{m,j} + h^3_{n,i} \cdot h^3_{m,j}) \dots\dots\dots(50)$$

$m, n = 1..N \quad i, j = 1, 2, 3$

Si se adoptan las hipótesis de deformaciones pequeñas con giros moderados, los productos de las derivadas del desplazamiento longitudinal se consideran infinitesimales y la matriz de interpolación no-lineal se reduce a:

$$(b_{NL})_{mn}^{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot (h^2_{n,i} \cdot h^2_{m,j} + h^3_{n,i} \cdot h^3_{m,j}) \dots\dots\dots(51)$$

$m, n = 1..N \quad i, j = 1, 2, 3$

Luego, agrupando los términos en una tres vectores fila de 1xN y tres matrices de NxN, las componentes no nulas del tensor de deformaciones finitas quedan interpoladas por las expresiones matriciales:

$$\{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{xy} \\ E_{xz} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{b}_L^{11} \\ \mathbf{b}_L^{12} \\ \mathbf{b}_L^{13} \end{bmatrix} \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} + [\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{NL}^{11} \\ \mathbf{b}_{NL}^{12} \\ \mathbf{b}_{NL}^{13} \end{bmatrix} \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} \dots\dots\dots(52)$$

Las componentes ingenieriles de deformaciones, se relacionan con las componentes tensoriales según:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ 2 \cdot E_{xy} \\ 2 \cdot E_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ 2 \cdot e_{xy} \\ 2 \cdot e_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_{xx} \\ 2 \cdot \eta_{xy} \\ 2 \cdot \eta_{xz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(53)$$

Luego, se tiene la expresión matricial del campo de deformaciones interpolado para el elemento de viga.

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \approx [\mathbf{B}_L] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} + [\hat{\mathbf{U}}]^T \cdot [\mathbf{B}_{NL}] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} \dots\dots\dots(54)$$

Donde las matrices derivadas de las funciones de forma se arreglan como:

$$[\mathbf{B}_L]^T = \left[\left[\mathbf{b}_L^{11} \right] \quad 2 \cdot \left[\mathbf{b}_L^{12} \right] \quad 2 \cdot \left[\mathbf{b}_L^{13} \right] \right] \dots\dots\dots(55)$$

$$[\mathbf{B}_{NL}]^T = \left[\left[\mathbf{b}_{NL}^{11} \right] \quad 2 \cdot \left[\mathbf{b}_{NL}^{12} \right] \quad 2 \cdot \left[\mathbf{b}_{NL}^{13} \right] \right] \dots\dots\dots(56)$$

En las figuras siguientes, se muestran las componentes de las matrices derivadas de interpolación.

$$[\mathbf{B}_L]_{3 \times N} = \begin{bmatrix} (b_L^{11})_1 & (b_L^{11})_2 & \dots & (b_L^{11})_N \\ (b_L^{12})_1 & (b_L^{12})_2 & \dots & (b_L^{12})_N \\ (b_L^{13})_1 & (b_L^{13})_2 & \dots & (b_L^{13})_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots(57)$$

$$[\mathbf{B}_{NL}]_{3 \times N \times N} = \begin{bmatrix} (b_{NL}^{11})_{11} & (b_{NL}^{11})_{12} & \dots & (b_{NL}^{11})_{1N} \\ (b_{NL}^{11})_{21} & (b_{NL}^{11})_{22} & \dots & (b_{NL}^{11})_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_{NL}^{11})_{N1} & (b_{NL}^{11})_{N2} & \dots & (b_{NL}^{11})_{NN} \\ (b_{NL}^{12})_{11} & (b_{NL}^{12})_{12} & \dots & (b_{NL}^{12})_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_{NL}^{12})_{N1} & (b_{NL}^{12})_{N2} & \dots & (b_{NL}^{12})_{NN} \\ (b_{NL}^{13})_{11} & (b_{NL}^{13})_{12} & \dots & (b_{NL}^{13})_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_{NL}^{13})_{N1} & (b_{NL}^{13})_{N2} & \dots & (b_{NL}^{13})_{NN} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(58)$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{du^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv^o}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_x}{dx} + \theta_z(x) + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) \\
e_{13} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_x}{dx} - \theta_y(x) + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial z} \right) \\
e_{13} &= 0 \\
\eta_{11} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv^o}{dx} - \frac{d\theta_x}{dx} \cdot z \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot y \right)^2 \\
\eta_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \right) \cdot \left(\theta_z + y \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \theta_z}{\partial y} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw^o}{dx} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot y \right) \cdot \theta_x \\
\eta_{13} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du^o}{dx} + y \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - z \cdot \frac{d\theta_y}{dx} \right) \cdot \left(-\theta_y + y \cdot \frac{\partial \theta_z}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{d\theta_x}{dx} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \cdot z - \frac{dv^o}{dx} \right) \cdot \theta_x \\
\eta_{23} &= 0
\end{aligned}$$

Fig.4 Componentes cartesianas del tensor de deformaciones de Green Lagrange.

Conclusiones.

El campo completo de desplazamientos para una viga de eje recto sección transversal constante y arbitraria fue formulado para la viga tridimensional sometida a esfuerzo normal, flexión, corte y torsión con alabeo.

A partir de una hipótesis de secciones planas, las deformaciones por corte fueron consideradas mediante una teoría de primer orden, admitiendo una teoría de primer orden y una distorsión de corte constante en la longitud del elemento, para cada plano de flexión transversal, consistente con los esquemas de interpolación adoptados para la flexión y la torsión.

Las deformaciones debidas a la torsión, fueron consideradas a partir de la solución de la teoría de la elasticidad para el tercer problema de Saint Venant. Una expresión de la función de alabeo fue aproximada con series simples para la sección rectangular, admitiendo un elemento de viga para el cual las secciones ya no son planas luego de la deformación.

El campo de desplazamientos formulado fue luego interpolado mediante un esquema de alta precisión con continuidad clase C1, para el que se obtuvieron una serie de funciones de forma. El conjunto de funciones de interpolación obtenido verificó las condiciones de convergencia y consistencia. Para el problema del elemento de viga 3-D fueron obtenidas finalmente las matrices de interpolación del campo de desplazamientos y del campo de deformaciones, el cual permite, mediante

una hipótesis del material, la formulación de una matriz tangente de rigidez del problema.

El campo de desplazamientos con continuidad C1 para el elemento de viga, fue formulado de manera consistente. Luego, en una formulación débil del equilibrio, éste no requerirá de esquemas de integración reducida de ningún tipo, pudiendo adoptarse cualquier esquema de cuadraturas abierto o cerrado.

Agradecimientos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Bathe, K., Bolourchi, S. Large Displacement analysis of three-dimensional beam structures. *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 14 961-986 (1979).
- [02] Belluzzi, O. *Ciencia de la Construcción*. Ed. Aguilar. Buenos Aires. (1967)
- [03] Felippa C.A., The Amusing History of Shear Flexible Elements. *Center for Aerospace Structures. Univ. Of Colorado*. CU-CAS-05-1 (2005)
- [04] Gradowczyk, M. *Cálculo matricial de estructuras*. Ed. Universitaria de Buenos Aires. EUDEBA. (1966)
- [05] Ghugal, Y.M. Shimpi, R.P. A review of Refined Shear Deformation Theories for isotropic and Anisotropic Laminated Beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. Vol.20 03/2001

- [06] Juarez Allen, A. *Apuntes sobre Torsión*, (P6CT4) Universidad Tecnológica Nacional. F.R. Buenos Aires. (P6CT4)
- [07] Lip H. the, Spatial Rotation Kinematics and Flexural-Torsional buckling. *Dept. of Civil Engineering. University of Sydney*.(2006)
- [08] Malvern, L. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall. Series in Engineering. (1969)
- [09] Petrov, E., Geradin, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part I: Beam Concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165 (1998) 43-92
- [10] Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis*. CRC Press.(1997)
- [11] Rusell, J.T. *Apuntes de Estabilidad III* . Departamento de Estabilidad. Facultad de Ingeniería Civil. UBA.